Ecuaciones Diferenciales I

Examen I

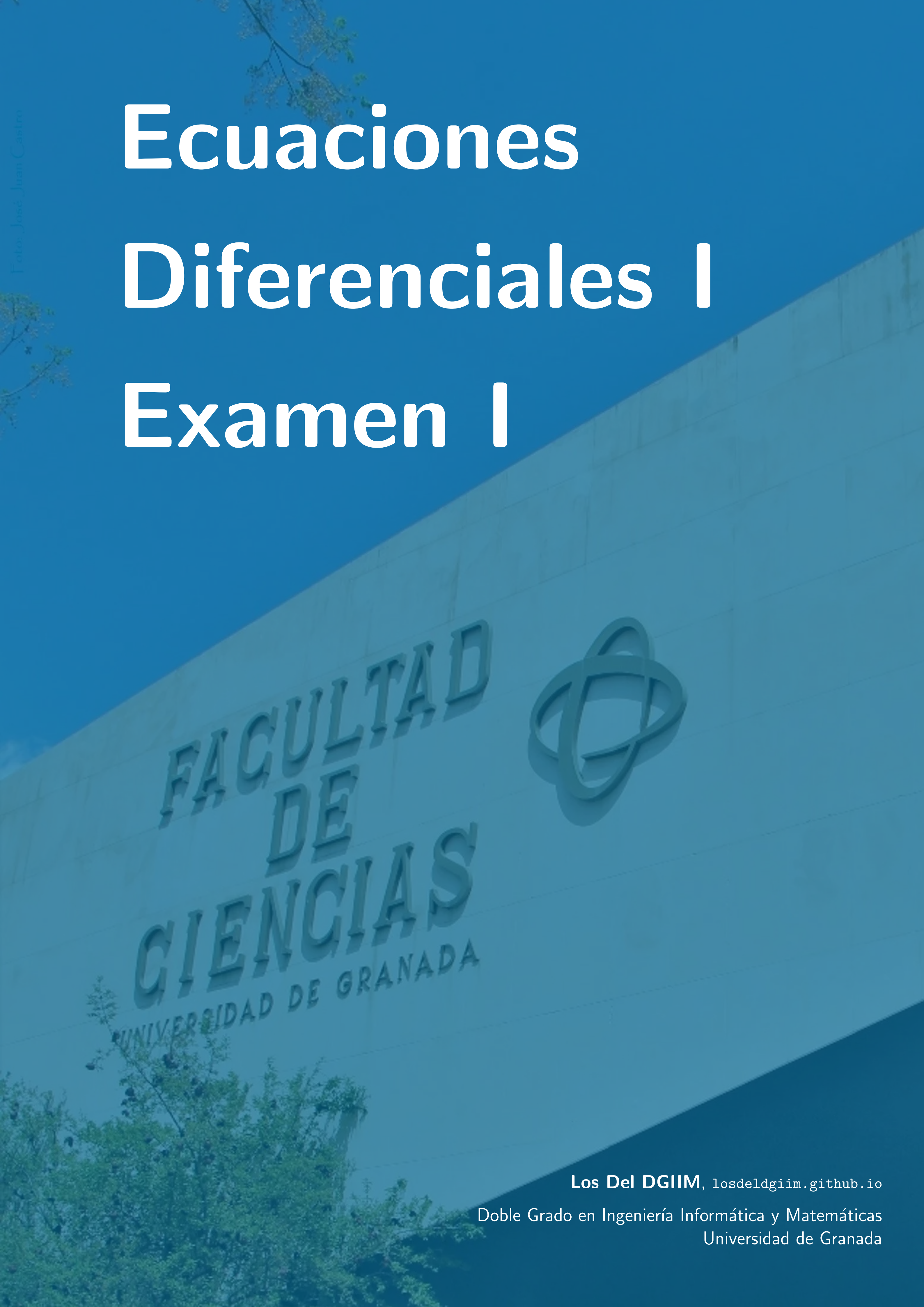

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2017-18.

Grupo B.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial A.

Fecha 22 de marzo de 2018.

Ejercicio 1. Se considera una solución cualquiera $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x' = 2tx.$$

Se supone que dicha solución está definida en un intervalo abierto I. Demuestra que, para cada $t \in I$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$x(t) = cet^2.$$

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & e^{-t^2}\ x(t) \end{array}$$

Tenemos que f es derivable en I por ser producto de funciones derivables. Calculemos su derivada:

$$f'(t) = -2te^{-t^2}\ x(t) + e^{-t^2}\ x'(t) = -2te^{-t^2}\ x(t) + 2te^{-t^2}\ x(t) = 0.$$

Por tanto, al ser $f'(t) = 0$ para todo $t \in I$, la función f es constante en I. Es decir:

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid f(t) = c \quad \forall t \in I.$$

Multiplicando por e^{t^2} ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos que:

$$x(t) = cet^2 \quad \forall t \in I.$$

Ejercicio 2. Demuestra que la transformación $\phi(t,x) = (s,y)$, $s = t$, $y = x + t$ define un difeomorfismo del plano que es compatible con la ecuación

$$x' = (x+t)^2.$$

Encuentra la solución de esta ecuación que cumple $x(0) = 0$ y especifica su intervalo de definición.

Ejercicio 3. Encuentra un cambio de variable que transforme la ecuación diferencial

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

en una ecuación homogénea.

Ejercicio 4. Dadas las ecuaciones

$$x = t + e, \quad y = 1 + t^4$$

demuestra que la eliminación del parámetro t nos permite definir una función derivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$. Además, la función $y(x)$ alcanza su mínimo en $x = 1$.

Ejercicio 5. Demuestra que la ecuación

$$x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x = t$$

define de forma implícita una única función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$. Además, prueba que se cumple la identidad $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$ para cada $t \in \mathbb{R}$.